Tutorato Algebra Lineare – 30/05/25

Esercizio [Esame scritto del 05/2022] Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni seguenti:

- $\|v\| = 3$
- v è ortogonale allo spazio delle colonne di A.

Soluzione

Cerco tutti i vettori $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\underbrace{\text{di norma } 3}_{\text{lo imponiamo dopo...}}$ tali che

$$v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^{\perp} \iff \begin{cases} \langle \underset{= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{v}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \\ \langle v, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ x - 4y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ -4y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z = 2y \\ z = -2y \end{cases}$$

quindi $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ossia $v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

La prima condizione dice che $\|v\| = 3$, cioè

$v = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix}$ $\qquad \|v\| \overset{⊛}{=} |y| \sqrt{4+1+4} = 3|y| = 3$

$$\Rightarrow |y| = 1, \text{ cioè } y = \pm 1.$$

In conclusione, i $v \in \mathbb{R}^3$ cercati sono $\pm \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

⊛ $w = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad \|w\| = \left\| \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \alpha^2 z^2} = |\alpha| \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Esercizio $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Sia $\varphi : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare data da $\varphi(1) = x$, $\varphi(x) = 1 - x + 2x^2$, $\varphi(x^2) = 2 + 2x$

[Esame scritto del 12/2023]

Determinare:

1) La matrice di φ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ (in partenza e in arrivo).

2) La matrice di φ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ in partenza e $\mathcal{B}' = \{x, 1 - x + 2x^2, 2 + 2x\}$ in arrivo

3) La matrice di φ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}'$ in partenza e $\mathcal{B}$ in arrivo.

4) La matrice di $\varphi \circ \varphi$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$ in partenza e in arrivo.

Soluzione

1) La matrice cercata è

$$\left([\varphi(1)]_{\mathcal{B}} \;\middle|\; [\varphi(x)]_{\mathcal{B}} \;\middle|\; [\varphi(x^2)]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$[\varphi(1)]_{\mathcal{B}} = [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$[\varphi(x)]_{\mathcal{B}} = [1 - x + 2x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi(x^2)]_{\mathcal{B}} = [2 + 2x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $\mathcal{B}' = \{ x,\ 1-x+2x^2,\ 2+2x \}$. La matrice cercata è

$$\left([\varphi(1)]_{\mathcal{B}'} \,\middle|\, [\varphi(x)]_{\mathcal{B}'} \,\middle|\, [\varphi(x^2)]_{\mathcal{B}'} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(1) = x = a \cdot x + b(1-x+2x^2) + c\,(2+2x)$$

$$1 \cdot x + 0 \cdot (\quad) + 0 \cdot (\quad)$$

3) Due strade:

3.1) "A MANO"

$$\underset{\mathcal{B}' \text{ in partenza}}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}}(\varphi) \ (\mathcal{B} \text{ in arrivo}) = \left([\varphi(x)]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [\varphi(1-x+2x^2)]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [\varphi(2+2x)]_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- $[\varphi(x)]_{\mathcal{B}} = [1-x+2x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $$\begin{aligned} [\varphi(1-x+2x^2)]_{\mathcal{B}} &= [\varphi(1) - \varphi(x) + 2\varphi(x^2)]_{\mathcal{B}} \\ &= [x - (1-x+2x^2) + 2(2+2x)]_{\mathcal{B}} \\ &= [3 + 6x - 2x^2]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} [\varphi(2+2x)]_{\mathcal{B}} &= [2\varphi(1) + 2\varphi(x)]_{\mathcal{B}} = [2x + 2(1-x+2x^2)]_{\mathcal{B}} \\ &= [2+4x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.2) CAMBIO DI BASE

$$\underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{\substack{\mathcal{B}' \text{ in partenza} \\ \mathcal{B} \text{ in arrivo}}} = \overbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)}^{\mathcal{B} \text{ in arrivo}} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\varphi)}_{\substack{\mathcal{B} \text{ in partenza} \\ \mathcal{B}' \text{ in arrivo}}} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)}_{\mathcal{B}' \text{ in partenza}}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

cambio di base $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$

$x, 1-x+2x^2, 2+2x$ scritti in coordinate nella base $1, x, x^2$

<u>NOTA</u>: È la stessa del punto 1): $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)\ \underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\varphi)}_{\text{abbiamo già visto che è l'identità}}\ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

4) $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi \circ \varphi)$. Ancora due strade:

4.1) "A MANO"

$$\left(\underbrace{[\varphi(\varphi(1))]_{\mathcal{B}}}_{[\varphi(x)]_{\mathcal{B}}} \;\middle|\; \underbrace{[\varphi(\varphi(x))]_{\mathcal{B}}}_{[\varphi(1-x+2x^2)]_{\mathcal{B}}} \;\middle|\; \underbrace{[\varphi(\varphi(x^2))]_{\mathcal{B}}}_{[\varphi(2+2x)]_{\mathcal{B}}} \right)$$

La matrice è la stessa del punto precedente: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$

In effetti, questo si poteva dedurre anche dalla seconda strada:

4.2) " COMPOSIZIONE $\longleftrightarrow$ PRODOTTO MATRICI "

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi\circ\varphi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\,\underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)}$$

quella determinata al punto 1)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2$$

NOTA. Abbiamo visto che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)$, quindi

visto prima (3.2)

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)^2 = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\,M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)\,M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$$

Esercizio Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3-k & -k & 1 \\ -1+k & 2+k & -1 \\ 1+k & k & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

Soluzione

1) Calcolo autovalori di A (in funzione di k) devono essere tutti reali!
2) Calcolo molteplicità geometriche (in funzione di k)
3) Ricerca dei valori di k per cui: $\forall \lambda$ autovalore $m_{geo}(\lambda) = m_{alg}(\lambda)$.

1) $$P_A(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 3-k-t & -k & 1 \\ -1+k & 2+k-t & -1 \\ 1+k & k & 3-t \end{pmatrix}$$

Laplace rispetto alla 3^a colonna

$$= \det\begin{pmatrix} k-1 & 2+k-t \\ k+1 & k \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 3-k-t & -k \\ k+1 & k \end{pmatrix} + (3-t)\det\begin{pmatrix} 3-k-t & -k \\ k-1 & 2+k-t \end{pmatrix}$$

$$= k^2-k + (2+k-t)(k+1) + 3k-k^2-kt+k^2+k + (3-t)\left[(3-k-t)(2+k-t)+k^2-k\right]$$

dopo tanti conti si trova [VEDERE LE ULTIME DUE PAGINE PER ALTRI METODI]

$$= -(t-2)^2(t-4)$$ (Notare che NON DIPENDE da k)

Autovalori: $\lambda = 2$ $(m_{alg}(2) = 2)$, $\lambda = 4$ $(m_{alg}(4) = 1)$.

2) Molteplicità geometrica.

- $m_{geo}(4) = m_{alg}(4) = 1$
- $m_{geo}(2) = \dim \ker(A-2I) = 3 - rk(A-2I)$

$$A-2I = \begin{pmatrix} 3-k-2 & -k & 1 \\ -1+k & 2+k-2 & -1 \\ 1+k & k & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & -k & 1 \\ k-1 & k & -1 \\ k+1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1-k & -k & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k+1 & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1-k & -k & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to \frac{1}{2}R_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1-k & -k & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2-(1-k)R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PIVOT?

Dipende: solo se $k \neq 0$

$$rk(A-2I) = \begin{cases} 2, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Quindi: $m_{geo}(2) = 3 - rk(A-2I) = \begin{cases} 1 & , \quad k \neq 0 \\ 2 & , \quad k = 0 \end{cases}$.

3) Diagonalizzabilità.

A diagonalizzabile $\iff \begin{cases} m_{geo}(2) = m_{alg}(2) = 2 \\ m_{geo}(4) = m_{alg}(4) = 1 \end{cases} \iff k = 0$.

per ogni valore di k ✓

EXTRA TUTORATO: altri metodi per il calcolo del determinante

Calcolando $\det\begin{pmatrix} 3-k-t & -k & 1 \\ -1+k & 2+k-t & -1 \\ 1+k & k & 3-t \end{pmatrix}$ tramite i metodi classici (Laplace/Sarrus)

ci si imbatte in considerevoli espressioni da semplificare; in effetti ci sono strade più rapide (o "meno contose").

① Calcolo del determinante tramite OPERAZIONI ELEMENTARI

[(per chi lo avesse visto / fosse interessato)]

Come cambia il det. se applichiamo operazioni elementari?

(1) scambio due righe : det CAMBIA SEGNO

(2) $R_i \to R_i + \alpha R_j$: det NON CAMBIA

(3) $R_i \to \alpha R_i$: $\det \to \alpha \cdot \det$

$$\det\begin{pmatrix} 3-k-t & -k & 1 \\ -1+k & 2+k-t & -1 \\ 1+k & k & 3-t \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1\to R_1+R_3 \\ (2)}}{=} \det\begin{pmatrix} 4-t & 0 & 4-t \\ -1+k & 2+k-t & -1 \\ 1+k & k & 3-t \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_2\to R_2-R_3 \\ (2)}}{=} \det\begin{pmatrix} 4-t & 0 & 4-t \\ -2 & 2-t & t-4 \\ 1+k & k & 3-t \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} (4-t)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2-t & t-4 \\ 1+k & k & 3-t \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_2\to R_2+2R_1 \\ (2)}}{=} (4-t)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & t-2 \\ 1+k & k & 3-t \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} (4-t)(2-t)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1+k & k & 3-t \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3\to R_3-(1+k)R_1 \\ (2)}}{=} (4-t)(2-t)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & k & 2-k-t \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3\to R_3-kR_2 \\ (3)}}{=} (4-t)(2-t)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix}$$

$$= (4-t)(2-t)^2$$

2 Più Truccosa: scelgo dei valori di k "buoni". [Strada non troppo rapida, ma le espressioni sono più semplici]

Dallo sviluppo di Laplace, si nota subito che il determinante cercato è un polinomio NELLA VARIABILE k di grado al più 2:

$$\det\begin{pmatrix} 3-k-t & -k & 1 \\ -1+k & 2+k-t & -1 \\ 1+k & k & 3-t \end{pmatrix} = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 = f(k).$$

Dei valori "comodi" di k sono dati da $k=0$, $k=1$, $k=-1$.
(Trovo degli zeri nella matrice)

Si ha $\begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_0 + a_1 + a_2 = f(1) \\ a_0 - a_1 + a_2 = f(-1) \end{cases}$. Risolvendo: $\begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_1 = \frac{1}{2}\left(f(1) - f(-1)\right) \\ a_2 = \frac{1}{2}\left(f(1) + f(-1)\right) - f(0) \end{cases}$

$$f(0) = \det\begin{pmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 1 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (2-t)\det\begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} = (2-t)\left[(3-t)^2 - 1\right]$$
$$= (2-t)^2(4-t).$$

$$f(1) = \det\begin{pmatrix} 2-t & -1 & 1 \\ 0 & 3-t & -1 \\ 2 & 1 & 3-t \end{pmatrix} = (2-t)\det\begin{pmatrix} 3-t & -1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3-t & -1 \end{pmatrix}$$
$$= (2-t)\left[(3-t)^2+1\right] + 2(t-2) = (2-t)\left[(3-t)^2+1-2\right] = (2-t)^2(4-t)$$

$$f(-1) = \det\begin{pmatrix} 4-t & 1 & 1 \\ -2 & 1-t & -1 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix} = (4-t)\det\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix}$$
$$= (4-t)\left[(1-t)(3-t)-1\right] + 2(4-t) = (4-t)(t^2-4t+4) = (4-t)(t-2)^2$$

Da cui $a_1 = a_2 = 0$ e il nostro determinante è $f(k) = a_0 = (2-t)^2(4-t)$.